1.6.7 Složitější typy vrhů

Předpoklady: 1606

Pedagogická poznámka: Tato hodina přesahuje běžnou látku, probírám ji pouze v případě, že mám přebytek času. Za normálních podmínek není příliš reálné s většinou třídy vyřešit více než první čtyři příklady.
Příklady 1 a 3 vyžadují více než je velká většina žáků schopna vymyslet, nemá cenu dlouho na nich čekat jestli někoho něco nenapadne.

Př. 1: Z věže vysoké 30 m byl pod úhlem $45°$ šikmo vzhůru vystřelen šíp rychlostí $45\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Jak daleko od paty věže dopadne na zem.

$h = 30\,\mathrm{m}$, $\alpha = 45°$, $v_0 = 45\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $x_{max} = ?$

$v_{0x} = v_0 \cos\alpha = 45 \cdot \cos 45°\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} = 31{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $v_{0y} = v_0 \sin\alpha = 45 \cdot \sin 45°\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} = 31{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$

Nejde o obyčejný šikmý vrh, šíp by vystřelen z nenulové výšky.

Dostřel: pohyb ve vodorovném směru $\Rightarrow$ $x_{max} = v_{0x} t$ $\Rightarrow$ musíme určit čas letu ze svislé složky pohybu.

Svislý směr: $y = y_0 + v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2$, stejně jako u šikmého vrhu platí, že okamžiku dopadu $y = 0$, na rozdíl od šikmého vrhu nemůžeme vynechat y_0, které se rovná 30 m.

Dosadíme: $0 = 30 + 31{,}8 \cdot t - \frac{1}{2} 10 t^2$.

Kvadratická rovnice: $5t^2 - 31{,}8 \cdot t - 30 = 0$

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-31{,}8) \pm \sqrt{(-31{,}8)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-30)}}{2 \cdot 5} = \frac{31{,}8 \pm 40{,}1}{10}$$

$t_1 = \frac{31{,}8 + 40{,}1}{10} = 7{,}2\,\mathrm{s}$ $\qquad$ $t_2 = \frac{31{,}8 - 40{,}1}{10} = -0{,}83\,\mathrm{s}$ (nyní zjevně k nepotřebě)

Dosadíme: $x_{max} = v_{0x} t = 31{,}8 \cdot 7{,}2\,\mathrm{m} = 229\,\mathrm{m}$

Šíp dopadne na zem ve vzdálenost 229 m od paty věže.

Dodatek: Příklad je možné řešit ještě rozdělením vrhu na dvě části. První částí je stoupání do nejvyšší výšky, druhou pak klesání (vodorovný vrh ze známé výšky).

Pedagogická poznámka: Žáci mají tendenci vrh dělit, ale způsobem, který jim neumožňuje příklad spočítat. Jako první část si určí šikmý vrh do stejné výšky, ze které je šíp vystřelen, a neuvědomí si, že nejsou schopni spočítat druhou část vrhu, kdy šíp padá z výšky 30 m s počáteční rychlostí, která není vodorovná.

Př. 2: Z věže vysoké 30 m byl pod úhlem $45°$ šikmo dolů vystřelen šíp rychlostí $45\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Jak daleko od paty věže dopadne na zem.

$h = 30\,\mathrm{m}$, $\alpha = 45°$, $v_0 = 45\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $x_{max} = ?$

$v_{0x} = v_0 \cos\alpha = 45 \cdot \cos 45°\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} = 31{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $v_{0y} = v_0 \sin\alpha = 45 \cdot \sin 45°\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} = 31{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$

Téměř stejný příklad jako předchozí, jediná odlišnost: střílíme šikmo dolů $\Rightarrow$ v_{0y} je záporná.

Dosadíme: $0 = 30 - 31,8 \cdot t - \frac{1}{2}10t^2$.

Kvadratická rovnice: $5t^2 + 31,8 \cdot t - 30 = 0$.

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-31,8 \pm \sqrt{31,8^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-30)}}{2 \cdot 5} = \frac{-31,8 \pm 40,1}{10}$$

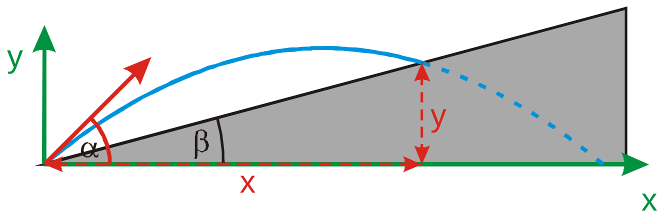
$t_1 = \frac{-31,8 + 40,1}{10} = 0,83\,\mathrm{s}$ $\quad$ $t_2 = \frac{-31,8 - 40,1}{10} = -7,2\,\mathrm{s}$ (nyní zjevně k nepotřebě)

Dosadíme: $x_{\max} = v_{0x}t = 31,8 \cdot 0,83\,\mathrm{m} = 26\,\mathrm{m}$.

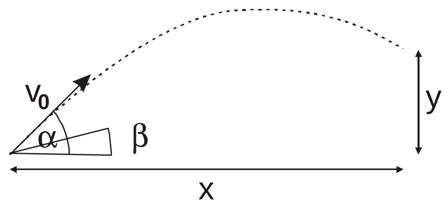
Šíp dopadne na zem ve vzdálenost 26 m od paty věže.

Př. 3: Kámen byl vržen pod úhlem $\alpha = 45°$ na nakloněnou rovinu stoupající pod úhlem $\beta = 15°$ rychlostí $v_0 = 20\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. V jaké vodorovné vzdálenosti a v jaké výšce nad místem vrhu kámen dopadne na nakloněnou rovinu?

$v_0 = 20\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $\alpha = 45°$, $\beta = 15°$, $x_{\max} = ?$, $y = ?$



Kámen se v průběhu letu pohybu stejně jako při šikmém vrhu:



- vodorovný směr rovnoměrný pohyb,
- svislý směr rovnoměrně zrychlený pohyb.

Problém: Pro dostřel $x = v_{0x}t$ potřebujeme určit čas dopadu, čas dopadu určit nemůžeme, protože nevíme, jak daleko a v jaké výšce kámen dopadne.

Víme: $x = v_{0x}t$, $y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$ $\Rightarrow$ dvě rovnice pro tři neznámé (*x*, *y*, *t*) $\Rightarrow$ potřebujeme nalézt třetí rovnici.

Ještě jsme nevyužili údaj, že házíme na nakloněnou rovinu stoupající pod úhlem $\beta = 15°$ $\Rightarrow$ pro souřadnice dopadu *x*, *y* platí: $\mathrm{tg}\,\beta = \frac{y}{x}$ (viz. obrázek) $\Rightarrow$ získali jsme třetí rovnici.

Dosadíme: $\mathrm{tg}\,\beta = \frac{v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2}{v_{0x}t}$

$\mathrm{tg}\,\beta v_{0x}t = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$ rovnici vydělíme *t* (čas $t = 0\,\mathrm{s}$ je jejím řešením, které nás nezajímá, protože víme, že v okamžiku vyhození byl kámen na počátku nakloněné roviny)

$\mathrm{tg}\,\beta v_{0x} = v_{0y} - \frac{1}{2}gt$

$\frac{1}{2}gt = v_{0y} - \mathrm{tg}\,\beta v_{0x}$

$t = \frac{2\left(v_{0y} - \mathrm{tg}\,\beta v_{0x}\right)}{g}$ (dosadíme $v_{0x} = v_0 \cos\alpha$, $v_{0y} = v_0 \sin\alpha$)

$$t=\frac{2\left(v_0\sin\alpha-\mathrm{tg}\,\beta v_0\cos\alpha\right)}{g}$$

$$t=\frac{2v_0\left(\sin\alpha-\mathrm{tg}\,\beta\cos\alpha\right)}{g}=\frac{2\cdot 20\left(\sin 45°-tg15°\cos 45°\right)}{10}\,\mathrm{s}=2\,\mathrm{s}$$

$$x=v_0\cos\alpha t=20\cdot\cos 45°\cdot 2\,\mathrm{m}=28{,}3\,\mathrm{m}$$

$$y=v_0\sin\alpha t-\tfrac{1}{2}gt^2=20\cdot\sin 45°\cdot 2-\tfrac{1}{2}\cdot 10\cdot 2^2\,\mathrm{m}=8{,}3\,\mathrm{m}$$

Kámen dopadne na nakloněnou rovinu na místo, které je od místa hodu vzdáleno ve vodorovné rovině 28,3 m a je o 8,3 m výše.

Pedagogická poznámka: Jakmile před třídou napíšete rovnice pro *x* a *y* a konstatujete, že máte pouze dvě rovnice pro tři neznámé, vždycky se najde někdo, kdo třetí rovnici objeví. Vždy podotýkám, že jde o stejný postup jaký se v matematice používá pro řešení slovních úloh: zvolíme neznámé a pak hledáme dostatečný počet rovnic, které využívají informace dané v zadání.

Př. 4: Kámen byl vržen pod úhlem $\alpha=45°$ na nakloněnou rovinu klesající pod úhlem $\beta=15°$ rychlostí $v_0=20\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. V jaké vodorovné vzdálenosti a v jaké hloubce pod místem vrhu kámen dopadne na nakloněnou rovinu?

$v_0=20\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $\alpha=45°$, $\beta=15°$, $x_{\max}=?$, $y=?$

Velmi podobný příklad jako předchozí, jediný rozdíl – nakloněná rovina klesá $\Rightarrow$ souřadnice *y* bude záporná $\Rightarrow$ musí platit $-\mathrm{tg}\,\beta=\dfrac{y}{x}$.

Dosadíme: $-\mathrm{tg}\,\beta=\dfrac{v_{0y}t-\frac{1}{2}gt^2}{v_{0x}t}$

$-\mathrm{tg}\,\beta v_{0x}t=v_{0y}t-\frac{1}{2}gt^2$ rovnici vydělíme *t* (čas $t=0\,\mathrm{s}$ je jejím řešením, které nás nezajímá, protože víme, že v okamžiku vyhození byl kámen na počátku nakloněné roviny)

$$-\mathrm{tg}\,\beta v_{0x}=v_{0y}-\tfrac{1}{2}gt$$

$$\tfrac{1}{2}gt=v_{0y}+\mathrm{tg}\,\beta v_{0x}$$

$$t=\frac{2\left(v_{0y}+\mathrm{tg}\,\beta v_{0x}\right)}{g}$$ (dosadíme $v_{0x}=v_0\cos\alpha$, $v_{0y}=v_0\sin\alpha$)

$$t=\frac{2\left(v_0\sin\alpha+\mathrm{tg}\,\beta v_0\cos\alpha\right)}{g}$$

$$t=\frac{2v_0\left(\sin\alpha+\mathrm{tg}\,\beta\cos\alpha\right)}{g}=\frac{2\cdot 20\left(\sin 45°+tg15°\cos 45°\right)}{10}\,\mathrm{s}=3{,}6\,\mathrm{s}$$

$$x=v_0\cos\alpha\cdot t=20\cdot\cos 45°\cdot 3{,}6\,\mathrm{m}=50{,}7\,\mathrm{m}$$

$$y=v_0\sin\alpha t-\tfrac{1}{2}gt^2=20\cdot\sin 45°\cdot 3{,}6-\tfrac{1}{2}\cdot 10\cdot 3{,}6^2\,\mathrm{m}=-13{,}9\,\mathrm{m}$$

Kámen dopadne na nakloněnou rovinu na místo, které je od místa hodu vzdáleno ve vodorovné rovině 50,7 m a je o 13,9 m níže.

Dodatek: Jinou možností je nechat rovnice zcela stejné a dosazovat $\beta=-15°$. Matematicky je to určitě správnější, umožňuje nám to převzít řešení z předchozího příkladu a změnit pouze dosazení. Pro žáky je však tento přístup těžší, nepoužívali ještě goniometrické funkce mimo interval $\langle 0;90°\rangle$ a neví, že pro $-15°$ je hodnota tangens záporná.

Pedagogická poznámka: V dalších příkladech využívám přímo vzorce pro maximální dostřel a maximální výšku vrhu odvozené v minulé hodině. Žákům zdůrazňuji, že si tyto vzorce nemají pamatovat, mohou je opisovat ze sešitu, stačí, že ví o jejich existenci.

Př. 5: Urči největší možnou vzdálenost, do které může doletět ulomený zub kotoučové pily o poloměru 25 cm při rychlosti otáčení 1500 otáček za minutu.

$r = 25\,\text{cm} = 0{,}25\,\text{m}$, $\omega = 1500\,\text{ot}\cdot\text{min}^{-1} = 157\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$, $x_{max} = ?$
Ulomený zub se v prvním okamžiku pohybuje obvodovou rychlostí kotouče, v další části jeho pohybu na něj působí pouze gravitační síla $\Rightarrow$ jde o vrh.
Největší možná vzdálenost $\Rightarrow$ vrh pod ideálním úhlem $\alpha = 45°$.
$v_0 = \omega r = 157\cdot 0{,}25\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1} = 39\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$
Dolet šikmého vrhu: $x_{max} = \dfrac{v_0^2\cdot\sin 2\alpha}{g} = \dfrac{39^2\cdot\sin(2\cdot 45°)}{10}\,\text{m} = 154\,\text{m}$.
Ulomený zub může doletět do vzdálenosti 154 m.

Dodatek: Skutečná vzdálenost je podstatně menší, protože u tak vysoké počáteční rychlosti není možné zanedbat odpor vzduchu.

Př. 6: Sportovec při vrhu kladivem roztáčí kladivo o hmotnosti 7,25 kg po kružnici o poloměru 1,4 m tak ,že vykoná jednu otáčku za 0,35 s. Jakou rychlostí se kladivo pohybuje? Jak daleko doletí, když ho atlet touto rychlostí vyhodí pod úhlem 45° ?

$m = 7{,}25\,\text{kg}$, $r = 1{,}4\,\text{m}$, $T = 0{,}35\,\text{s}$, $v = ?$, $\alpha = 45°$, $x_{max} = ?$
Předpokládáme, že kladivo se na konci roztáčení pohybuje přibližně rovnoměrně po kružnici $\Rightarrow$ obvodová rychlost tohoto otáčení se pak stane počáteční rychlostí vrhu.
$v = \dfrac{s}{t} = \dfrac{2\pi r}{T} = \dfrac{2\pi\cdot 1{,}4}{0{,}35}\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1} = 25\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$
Dolet šikmého vrhu: $x_{max} = \dfrac{v_0^2\cdot\sin 2\alpha}{g} = \dfrac{25^2\cdot\sin(2\cdot 45°)}{10}\,\text{m} = 63\,\text{m}$.
Atlet dohodí do vzdálenosti 63 m.

Dodatek: Světový rekord je 86,74 m. Příklad nepopisuje hod příliš věrně, nezanedbatelnou část energie dodá atlet i při odhazování kladiva. Přesto je vliv roztáčení značný, protože hmotnost kladiva se rovná hmotnosti koule, u které se světový rekord rovná pouze 23,12 m. Délka závěsu kladiva je přibližně 1,2 m. K této délce je třeba připočíst i část délky paže (rozhodně ne však celou délku, protože při roztáčení se atlet zaklání), ve které vrhač kladivo drží.

Př. 7: Nejvyšší rychlost, kterou dokážeš vyhodit míček, je 12 m/s. Dokážeš ze čtyř metrů hodit do okna ve výšce 7 m?

$v_{0\max} = 12\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $x = 4\,\mathrm{m}$, $y = 7\,\mathrm{m}$, $v_0 = ?$

Kámen do okna hodíme šikmým vrhem s neznámým počátečním úhlem. Uvažujeme, že kámen právě dohodíme (při trošku menší rychlosti by do místa nedoletěl) $\Rightarrow$ okno se nachází v bodě maximální výšky vrhu $\Rightarrow$

- výška $y = 7\,\mathrm{m}$ je maximální výškou vrhu $\Rightarrow$ můžeme z ní určit svislou počáteční rychlost i dobu výstupu kamene,
- vzdálenost $x = 4\,\mathrm{m}$ je vzdáleností, kterou kámen urazí ve vodorovném směru a když budeme znát dobu výstupu, můžeme z ní určit potřebnou vodorovnou počáteční rychlost.

Vzorec pro maximální výšku vrhu: $y_{\max} = \dfrac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} = \dfrac{v_{0y}^2}{2g}$ $\Rightarrow$

$v_{oy} = \sqrt{y_{\max} \cdot 2g} = \sqrt{7 \cdot 2 \cdot 10}\,\mathrm{m.s^{-1}} = 11{,}8\,\mathrm{m.s^{-1}}$

Doba výstupu: $t_v = \dfrac{v_{0y}}{g} = \dfrac{11{,}8}{10}\,\mathrm{s} = 1{,}2\,\mathrm{s}$

Vzdálenost uražená ve vodorovném směru: $x = v_{0x} t \;\Rightarrow\; v_{0x} = \dfrac{x}{t} = \dfrac{4}{1{,}2}\,\mathrm{m \cdot s^{-1}} = 3{,}3\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

Celková počáteční rychlost: $v_0 = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2} = \sqrt{3{,}3^2 + 11{,}8^2}\,\mathrm{m \cdot s^{-1}} = 12{,}3\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

Míček do okna hodit nedokážeme, protože bychom potřebovali hodit rychlostí alespoň $12{,}3\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

Shrnutí: